

예제로
마스터
하는
방법
이
적분

부록

문제 연습과 해답



연습

▶ 역삼각함수의 계산 (강의편 p.24 참조)

다음 식의 값을 구하라.

(1) $\tan^{-1} \frac{3}{5} + \tan^{-1} \frac{1}{4}$

(2) $\cos^{-1} x + \sin^{-1} x$



다음 식의 값을 구하라.

$$(1) \cos^{-1} \frac{3}{\sqrt{10}} + \cos^{-1} \frac{2}{\sqrt{5}} \quad (2) \tan^{-1} x + \tan^{-1} \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$$



연습

▶ 무리함수의 미분 (강의편 p.33 참조)

다음 함수를 미분하라.

(1) $\frac{(1+x^4)^{\frac{1}{4}}}{x}$

(2) $\frac{{}_3\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}$

다음 함수를 미분하라.

$$(1) \frac{x^3}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$(2) \sqrt{\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}}$$



연습

▶ 삼각함수의 미분 (강의편 p.33, 38 참조)

다음 함수를 미분하라.

(1) $\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$

(2) $\frac{\sin x}{\sqrt{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}}$



다음 함수를 미분하라.

$$(1) \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$$

$$(2) \frac{\cos x}{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}}$$



연습

▶ 쌍곡선함수의 미분 (강의편 p.26, 37 참조)

다음 함수를 미분하라.

(1) $\cosh x$

(2) $\sinh^{-1} x$

(3) $\tanh x$



다음 함수를 미분하라.

(1) $\sinh x$

(2) $\cosh^{-1} x$

(3) $\frac{1}{\tanh x}$



연습

▶ 역삼각함수의 미분 (강의편 p.41 참조)

다음 함수를 미분하라.

(1) $x \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2}$

(2) $\tan^{-1}\left(\frac{a + \tan x}{1 - a \tan x}\right)$



다음 함수를 미분하라.

(1) $x \cos^{-1} x - \sqrt{1-x^2}$

(2) $\tan^{-1} \left(\frac{a \sin x + b \cos x}{a \cos x - b \sin x} \right)$



연습

▶ 로그미분법 (강의편 p.44 참조)

다음 함수를 미분하라.

(1) $\frac{(x-1)^2}{(x+1)^2(x+2)^3}$

(2) $(\cos x)^{\sin x}$



다음 함수를 미분하라.

(1) $\sqrt{\frac{x+1}{(x+2)(x+3)}}$

(2) $x^{(x^x)}$



연습

▶ n 계 도함수 (강의편 p.52 참조)

다음 함수의 n 계 도함수를 구하라.

(1) $\frac{1}{(x+1)(x+2)}$

(2) $e^x \cos x$



다음 n 계 도함수를 구하라.

(1) $\frac{x+1}{(x-1)^2}$

(2) $e^{\sqrt{3}x} \sin x$



연습

▶ 음함수의 미분 (강의편 p.56 참조)

$x^2+xy-2y^2=1$ 로 정의한 함수 $y=y(x)$ 에 대해 y' , y'' 를 x , y 로 나타내라.



$x^3 - 3xy + y^3 = 0$ 으로 정의한 함수 $y=y(x)$ 에 대해 y', y'' 를 x, y 로 나타내라.



연습

▶ 라이프니츠의 미분 공식 (강의편 p.53 참조)

- (1) $e^{-2x} \sin 3x$ 의 3계 도함수를 구하라.
- (2) $x^2 a^x$ 의 n 계 도함수를 구하라.



- (1) $e^{2x} \cos 3x$ 의 3계 도함수를 구하라.
- (2) $x^2 \sin ax$ 의 n 계 도함수를 구하라.



연습

▶ 라이프니츠 미분 공식의 응용 (강의편 p.53 참조)

$y = \sinh^{-1} x$ 일 때 다음 (1)~(3)을 증명하라.

$$(1) \quad (1+x^2)y'' = -xy'$$

$$(2) \quad (1+x^2)y^{(n+2)} + (2n+1)xy^{(n+1)} + n^2y^{(n)} = 0$$

$$(3) \quad y^{(2m)}(0) = 0, \quad y^{(2m+1)}(0) = (-1)^m (2m-1)^2 \cdot \dots \cdot 5^2 \cdot 3^2 \cdot 1^2$$



$y = \cos^{-1} x$ 일 때 다음 (1)~(3)을 증명하라.

$$(1) \quad (1-x^2)y'' = xy'$$

$$(2) \quad (1-x^2)y^{(n+2)} - (2n+1)xy^{(n+1)} - n^2y^{(n)} = 0$$

$$(3) \quad y^{(2m)}(0) = 0, \quad y^{(2m+1)}(0) = -1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdots (2m-1)^2 \quad (m \text{은 자연수})$$



x, y 를 다음과 같이 나타낼 때 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ 를 구하라.

$$(1) \begin{cases} x = a(\theta - \sin \theta) \\ y = a(1 - \cos \theta) \end{cases} \quad (a \neq 0) \quad (2) \begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^3} \\ y = \frac{3at^2}{1+t^3} \end{cases} \quad (a \neq 0)$$

x, y 를 다음과 같이 나타낼 때 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ 를 구하라.

$$(1) \begin{cases} x = a \cos^3 \theta \\ y = a \sin^3 \theta \end{cases} \quad (a \neq 0) \qquad (2) \begin{cases} x = \frac{at^2}{1+t^2} \\ y = \frac{at^3}{1+t^2} \end{cases} \quad (a \neq 0)$$



연습

▶ 그래프 그리기 (강의편 p.64 참조)

함수 $y = \frac{x^2}{x^2 + 3}$ 의 증감·요철을 조사하여 대강의 그래프를



함수 $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ 의 증감 • 요철을 조사하여 대강의 그래프를 그려라.



연습

▶ 그래프 그리기 (강의편 p.64 참조)

함수 $y=e^{-\frac{1}{3}x^3}$ 의 증감·요철을 조사하여 대강의 그래프를 그려라.



함수 $y=x^2e^{-x}$ 의 증감·요철을 조사하여 대강의 그래프를 그려라.

**연습**

▶ 연속성 · 미분 가능성 (강의편 p.68 참조)

다음 함수가 $x=0$ 에서 연속인지, 미분 가능인지를 조사하라.

(1) $f(x) = x|x|$

(2) $f(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0) \end{cases}$

다음 함수가 $x=0$ 에서 연속인지, 미분 가능인지를 조사하라. 단, (1)은 $f(0)=0$ 이고, $x \neq 0$ 에서 다음 식으로 나타낼 수 있다고 한다.

$$(1) \quad f(x) = x \tan^{-1} \frac{1}{x}$$

$$(2) \quad f(x) = \frac{x}{1 + 2\frac{1}{x}}$$

**연습**

▶ 1차 함수와 부정적분 (강의편 p.76 참조)

다음 함수의 부정적분을 구하라.

(1) $(2x-1)^{\frac{1}{3}}$

(2) $\frac{1}{4-3x}$

(3) e^{3x+2}

(4) $\sin\left(\frac{x}{2}-1\right)$

(5) $\frac{1}{\cos^2(3x+1)}$

(6) $\frac{1}{9x^2-12x+9}$

다음 함수의 부정적분을 구하라.

(1) $\frac{1}{(1-3x)^2}$

(2) 2^{4x+1}

(3) $\cos\left(\frac{x}{3}+1\right)$

(4) $\frac{1}{\sin^2(2x-3)}$

(5) $\frac{1}{\sqrt{4x^2+4x+7}}$

(6) $\frac{1}{\sqrt{-4x^2+4x+7}}$

**연습**

▶ 치환적분 (강의편 p.76 참조)

다음 함수의 부정적분을 구하라.

(1) $\frac{x^2+1}{\sqrt[3]{x^3+3x+1}}$

(2) $\frac{1}{(x^2+1)\tan^{-1}x}$

(3) $\tanh x$

(4) $\frac{x}{x^4+4}$

(5) $\sin^5 x$

(6) $\frac{1}{\sinh x}$

다음 함수의 부정적분을 구하라.

(1) $\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}$

(2) $\frac{1}{x \log x}$

(3) $\frac{1}{\tan x}$

(4) $\frac{x}{\sqrt{x^4+2}}$

(5) $\cos^5 x$

(6) $\frac{1}{\cosh x}$



연습

▶ 치환적분(문자로 치환) (강의편 p.78 참조)

다음 함수의 부정적분을 구하라.

(1) $\frac{\sqrt{x-1}}{x+1}$

(2) $\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$

(3) $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

다음 함수의 부정적분을 구하라.

$$(1) \frac{1}{x + \sqrt{x-1}}$$

$$(2) \frac{1}{\sqrt{x} (1 + \sqrt[3]{x})}$$

$$(3) \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$



연습

▶ 부분적분 (강의편 p.81 참조)

다음 함수의 부정적분을 구하라.

(1) $x^2 \log x$

(2) $x^2 \sin x$

(3) $\sin^{-1} x$

(4) $e^{ax} \cos bx$



다음 함수의 부정적분을 구하라.

(1) $\sqrt{x} \log x$

(2) $x^2 \cos x$

(3) $\tan^{-1} x$

(4) $e^{ax} \sin bx$



연습

▶ 치환적분(삼각함수로 치환) (강의편 p.78, 83 참조)

다음 함수를 부정적분하라.

$$(1) \frac{1}{(a^2 - x^2)^{\frac{5}{2}}} \quad (a > 0)$$

$$(2) \frac{1}{x^4(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (a > 0)$$

다음 함수를 부정적분하라.

$$(1) \frac{x^4}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (a > 0)$$

$$(2) \frac{x^2}{(a^2 + x^2)^{\frac{7}{2}}} \quad (a > 0)$$



연습

▶ 치환적분($\sqrt{2}$ 차식형) (강의편 p.82, 94 참조)

다음 함수의 부정적분을 구하라.

$$(1) \frac{1}{(2x-1)\sqrt{2x^2-4x-1}}$$

$$(2) \frac{1}{(x+3)\sqrt{2-x-x^2}}$$



다음 함수의 부정적분을 구하라.

(1) $\frac{1}{(x+1)\sqrt{4x^2+x+1}}$

(2) $\frac{1}{(x-1)\sqrt{2+x-x^2}}$



연습

▶ 유리함수의 적분 (강의편 p.89 참조)

다음 함수의 부정적분을 구하라.

$$\frac{1}{x^3+1}$$

다음 함수의 부정적분을 구하라.

$$\frac{x}{x^3-1}$$



연습

▶ 치환적분(삼각함수에 대해) (강의편 p.92 참조)

다음 함수의 부정적분을 구하라.

(1) $\frac{1 + \sin x}{\sin x(1 + \cos x)}$

(2) $\frac{1}{\sin^2 x + 9 \cos^2 x}$

다음 함수의 부정적분을 구하라.

$$(1) \frac{\sin x}{1 + \sin x}$$

$$(2) \frac{\sin^2 x}{1 + 3 \sin^2 x}$$



연습

▶ 적분과 점화식 (강의편 p.97 참조)

(1) $I_n = \int (\log x)^n dx$ 로 둔다. I_n 을 I_{n-1} 로 나타내고 I_4 를 구하라.

(2) $I_n = \int x^n \sqrt{x+ad} dx$ 로 둔다. I_n 을 I_{n-1} 로 나타내라.

(1) $I_n = \int (\sin^{-1} x)^n dx$ 로 둔다. $n \geq 2$ 일 때 I_n 을 I_{n-2} 로 나타내라.

(2) $I_n = \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx$ 로 둔다. I_{n+1} 을 I_n 으로 나타내고 I_3 을 구하라.



연습

▶ 이상적분 (강의편 p.103 참조)

다음 정적분을 구하라.

(1) $\int_0^{\infty} x^3 e^{-x} dx$

(2) $\int_0^1 (\log x)^2 dx$

(3) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2 e^x + b^2 e^{-x}} dx \quad \begin{pmatrix} a > 0 \\ b > 0 \end{pmatrix}$

(4) $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} dx$

다음 정적분을 구하라.

$$(1) \int_0^{\infty} x^4 e^{-x} dx$$

$$(2) \int_0^{\infty} \frac{\log(1+x^2)}{x^2} dx$$

$$(3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} dx \quad \left(\begin{array}{l} a > 0 \\ b > 0 \end{array} \right)$$

$$(4) \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{|x(1-x)|}} dx$$



연습

▶ 거울상 정적분 (강의편 p.110 참조)

다음 정적분을 구하라.

(1) $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1 + \tan x) dx$



다음 정적분을 구하라.

$$(1) \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + |\cos x|} dx$$

$$(2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos x) dx$$



$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ 로 두고 다음을 나타내라.

(1) $B(p, q) = \frac{q-1}{p} B(p+1, q-1)$

(2) p, q 가 양의 정수일 때 $B(p, q) = \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}$

(3) m, n 은 자연수, $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ 는 실수라 한다. $y = (x-\alpha)^n(\beta-x)^m$ 과 x 축으로 둘러싸인 부분의 면적 S 를 구하라.



$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx \quad (s > 0)$ 로 두고 다음을 나타내라.

(1) $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$

(2) s 가 양의 정수일 때 $\Gamma(s) = (s-1)!$



연습

▶ 베타 함수 · 감마 함수 (강의편 p.114 참조)

다음 정적분을 구하라.

(1) $\int_0^{\infty} \sqrt[3]{\frac{x}{(1+x)^{10}}} dx$ ($t = \frac{x}{x+1}$ 로 둔다)

(2) $\int_0^1 (\log x)^n dx$ (n 은 음이 아닌 정수) ($t = -\log x$ 로 둔다)

다음 정적분을 구하라.

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\frac{3}{2}} \cos^5 x dx$ ($t = \sin^2 x$ 로 둔다)

(2) $\int_0^{\infty} x^4 e^{-x^2} dx$ ($t = x^2$ 으로 둔다)



연습

▶ 면적 (강의편 p.117, 128 참조)

다음 곡선으로 둘러싸인 부분의 면적 S 를 구하라. 단, $a > 0$ 라 한다.

$$(1) \begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi) \quad (2) \quad r = a \cos \theta \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)$$



다음 곡선으로 둘러싸인 부분의 면적 S 을 구하라. 단, $a > 0$ 라 한다.

$$(1) \quad \begin{cases} x = a \cos^5 t \\ y = a \sin^5 t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi) \quad (2) \quad r = a(1 + \cos \theta) \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$



연습

▶ 회전체의 부피 (강의편 p.122 참조)

다음 회전체의 부피 V 를 구하라.

- (1) $y=\sin x, y=1-\cos x \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$ 로 둘러싸인 부분을 x 축에 대해 회전
- (2) $y=\sqrt{x}-x$ 와 x 축으로 둘러싸인 부분을 y 축에 대해 회전
- (3) $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t) (0 \leq t \leq 2\pi)$ 와 x 축으로 둘러싸인 부분을 x 축에 대해 회전

다음 회전체의 부피 V 를 구하라.

- (1) $y=x(2-x)$ 와 $y=x^2$ 으로 둘러싸인 부분을 x 축에 대해 회전
- (2) $y=x-x^3(0 \leq x \leq 1)$ 과 x 축으로 둘러싸인 부분을 y 축에 대해 회전
- (3) $x=a \cos^3 t, y=a \sin^3 t(0 \leq t \leq 2\pi)$ 로 둘러싸인 부분을 x 축에 대해 회전. 단, $a > 0$ 라 한다.

**연습**

▶ 곡선의 길이 (강의편 p.131 참조)

다음 곡선의 길이 L 을 구하라. 단, $a > 0$ 라 한다.

$$(1) \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi) \quad (2) \quad y = x^2 \quad (0 \leq x \leq 1)$$

$$(3) \quad r = a \cos^3 \frac{\theta}{3} \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{3}{2}\pi\right)$$

다음 곡선의 길이 L 을 구하라. 단, $a > 0$ 라 한다.

$$(1) \quad \begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

$$(2) \quad y = a \cosh \frac{x}{a} \quad (0 \leq x \leq a)$$

$$(3) \quad r = a(1 + \cos \theta) \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$



연습

▶ 샌드위치 정리 (강의편 p. 140 참조)

다음 극한을 구하라.

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n}{n!}$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (3^n + 5^n)^{\frac{1}{n}}$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$



다음 극한을 구하라.

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n}$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (3^{-n} + 5^{-n})^{-\frac{1}{n}}$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n(n+1)}$



연습

▶ 유계단조수열의 수렴 (강의편 p. 143 참조)

$a_1=4, a_{n+1}=2^{a_n-3}+\frac{3}{2}$ 을 만족하는 수열 $\{a_n\}$ 에서 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 을 구하라.



$a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = \log_2 a_n + 2$ 를 만족하는 수열 $\{a_n\}$ 에서 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 을 구하라.



연습

▶ 무한급수의 합 (강의편 p. 144 참조)

다음 무한급수의 합을 구하라.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$

다음 무한급수의 합을 구하라.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$



연습

▶ 무한급수의 수렴 · 발산 (강의편 p. 151 참조)

다음 무한급수의 수렴 · 발산을 판정하라.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{n!}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+3} \right)^n$$

다음 무한급수의 수렴 · 발산을 판정하라.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots 3n}$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2}$$

**연습**

▶ 절대수렴 · 조건수렴 (강의편 p. 153 참조)

다음 무한급수는 수렴인가 발산인가? 수렴이라면 절대수렴인가 조건수렴인가?

(1) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\log n}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$

다음 무한급수는 수렴인가 발산인가? 수렴이라면 절대수렴인가 조건수렴인가?

$$(1) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\log n}{n}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{2n+1}$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{\log n}{n^2}$$



연습

▶ 수렴 반지름 (강의편 p. 155 참조)

다음 정급수의 수렴 반지름 R 을 구하라.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} x^n$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)^n} x^n$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} (2n)^n x^{n^2}$$

다음 정급수의 수렴 반지름 R 을 구하라.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)2^n} \cdot x^n$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} x^n$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} n^{2n+1} x^{n^2}$$



연습

▶ 함수의 극한 (강의편 p. 137 참조)

다음 극한을 구하라.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 5x + 2}{2x^2 - x - 1}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 5x + 2}{2x^2 - x - 1}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 6x} - x)$$



다음 극한을 구하라.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{2x^2 - 3x - 2}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - 8}{2x^2 - 3x - 2}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - \sqrt{x^2 + x})$$



연습

▶ 함수의 극한 (강의편 p. 158 참조)

다음 극한을 구하라.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{\sin^4 x}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x - \sin^2 x}{x^4}$$

다음 극한을 구하라.

$$(1) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos(1 - \sin x)}{\sin^4(\cos x)}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^3 x - \sin^3 x}{x^5}$$



연습

▶ 로피탈의 정리 (강의편 p. 161 참조)

다음 극한값을 구하라.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \cos(ax)}{\log \cos(bx)}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x \right)$$

다음 극한값을 구하라.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\tan^2 x)(\log \sin x)$$



연습

▶ 로피탈의 정리 (강의편 p. 161 참조)

다음 극한값을 구하라.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x(x+1)} - \frac{\log(1+x)}{x^2} \right) \quad (2) \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$$

다음 극한값을 구하라.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2 x} \right) \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}} \quad (a, b, c \text{는 양수})$$



연습

▶ 매클로린 전개 (강의편 p. 176 참조)

다음 함수의 n 계 도함수를 계산하여 매클로린 전개하라. 또한, 수렴 반지름 R 을 구하라.

(1) $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$

(2) $\cosh x$



다음 함수의 n 계 도함수를 계산하여 매클로린 전개하라. 또한, 수렴 반지름 R 을 구하라.

(1) a^x

(2) $\log(1+3x+2x^2)$



연습

▶ 매클로린 전개 (강의편 p. 176 참조)

다음 함수를 p. 179의 공식을 이용하여 매클로린 전개하라.

(1) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(2) $\sin^{-1} x$



다음 함수를 p. 179의 공식을 이용하여 매클로린 전개하라.

(1) $\sin^3 x$

(2) $\frac{x^2}{1+x^2}$

(3) $\tan^{-1} x$

**연습**

▶ 매클로린 전개를 이용한 근사식 (강의편 p. 176 참조)

p. 179의 공식을 이용하여 x 의 절댓값이 작을 때의 다음 근사식을 나타내라.

$$(1) \quad \sqrt{1-x+x^2} \doteq 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{16}x^3$$

$$(2) \quad \tan x \doteq x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5$$

p. 179의 공식을 이용하여 x 의 절댓값이 작을 때의 다음 근사식을 나타내라.

$$(1) \quad \log(1 + \sin x) \doteq x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$$

$$(2) \quad (1+x)^{\frac{1}{x}} \doteq e - \frac{e}{2}x + \frac{11e}{24}x^2$$



연습

▶ 편도함수 (강의편 p. 187 참조)

다음 함수의 편도함수 f_x , f_y 를 구하라.

$$(1) \quad f(x, y) = x^2 \tan^{-1} \frac{y}{x} - y^2 \tan^{-1} \frac{x}{y} \quad (2) \quad f(x, y) = \log_y x$$

다음 함수의 편도함수 f_x , f_y 를 구하라.

(1) $f(x, y) = x \sin^{-1} \frac{y}{x}$

(2) $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$



연습

▶ 전미분과 접평면 (강의편 p. 191, 204 참조)

- (1) 곡면 $S: z = \cos(x+2y)$ 의 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$ 에서의 전미분, 접평면 식을 구하라.
- (2) 곡면 $S: xy+2yz+3zx=1$ 의 $(1, -1, 2)$ 에서의 전미분, 접평면 식을 구하라.

- (1) 곡면 $S: z = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ 의 $(1, \sqrt{3})$ 에서의 전미분, 접평면 식을 구하라.
- (2) 곡면 $S: x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3} = 1$ 의 $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, 1, -1\right)$ 에서의 전미분, 접평면 식을 구하라.



연습

▶ 전미분의 변수 변환 (강의편 p. 199 참조)

전미분 가능한 함수 $z=e^x \cosh y$ 에 대해

(1) $x=\cos \theta, y=\sin \theta$ 일 때 $\frac{dz}{d\theta}$ 를 구하라.

(2) $x=u+v, y=uv$ 일 때 $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$ 를 구하라.

전미분 가능한 함수 $z=x^y$ 에 대해

(1) $x=\cosh t, y=\sinh t$ 일 때 $\frac{dz}{dt}$ 를 구하라.

(2) $x=2u+v, y=uv^2$ 일 때 $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$ 를 구하라.



연습

▶ 2차 편도함수 (강의편 p. 205 참조)

함수 $f(x, y) = \sin^{-1} \frac{y}{x} (y > 0)$ 의 2차 편도함수 $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$ 를 구하라.



함수 $f(x, y) = \tan^{-1} \frac{y}{x}$ 의 2차 편도함수 $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$ 를 각각 구하라.



연습

▶ 2변수 함수의 극값 (강의편 p. 212 참조)

다음 함수의 극값을 구하라.

$$f(x, y) = x^4 + 6x^2 - 8xy + 2y^2$$



다음 함수의 극값을 구하라.

$$f(x, y) = xy(x^2 + y^2 - 1)$$



연습

▶ 라그랑주의 미정승수법 (강의편 p. 214 참조)

x, y 가 $x^2+xy+y^2=1$ 을 만족하면서 움직일 때 $2x^2+y^2$ 의 극값 후보를 구하라.



x, y 가 $x^2+y^2=1$ 을 만족하면서 움직일 때 $2x^2-xy+y^2$ 의 극값 후보를 구하라.



연습

▶ 라그랑주의 미정승수법 (강의편 p. 218 참조)

x, y, z 가 $x+y+z=6$ (x, y, z 는 양수)을 만족하면서 움직일 때 xy^2z^3 의 극값 후보를 구하라.



x, y, z 가 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{4} = 1$ 을 만족하면서 움직일 때 xyz 의 극값 후보를 구하라.



연습

▶ 2변수 함수의 연속성 (강의편 p. 221 참조)

다음 함수는 $(0, 0)$ 에서 연속인지를 조사하라.

(1)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

(2)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

다음 함수는 $(0, 0)$ 에서 연속인지를 조사하라.

(1)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

(2)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$



연습

▶ 누차적분 (강의편 p. 224, 226 참조)

다음 누차적분을 계산하라.

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x-y) dx dy \quad (2) \int_1^2 \int_1^{y^2} \frac{y}{x^2} dx dy$$



다음 누차적분을 계산하라.

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^2(2x-y)} dx dy \quad (2) \int_1^2 \int_y^{y^2} \frac{1}{x+y} dx dy$$



다음 중적분을 구하라.

(1) $\iint_D \sqrt{4x^2 - y^2} \, dx dy \quad D : 0 \leq y \leq x \leq 1$

(2) $\iint_D xy \, dx dy \quad D : x^2 + y^2 \leq x, y \geq 0$

다음 중적분을 구하라.

$$(1) \iint_D \sqrt{3x^2 + y^2} \, dydx \quad D : 0 \leq y \leq x \leq 1$$

$$(2) \iint_D (x + 2y) \, dx dy \quad D : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0, x \geq 0$$



연습

▶ 적분 순서의 변경 (강의편 p. 239 참조)

다음 누차적분의 순서를 변경하라.

(1) $\int_1^2 \int_y^{2y} f(x, y) dx dy$

(2) $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx dy$

(3) $\int_0^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{3-\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy dx$

다음 누차적분의 순서를 변경하라.

$$(1) \int_{-1}^2 \int_{y^2}^{2+y} f(x, y) dx dy$$

$$(2) \int_0^2 \int_{\frac{x^2}{4}}^{3-x} f(x, y) dy dx$$

$$(3) \int_0^1 \int_{\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy dx$$



연습

▶ 누차적분의 요령 (강의편 p. 240 참조)

다음 누차적분을 특별한 방법으로 계산하라.

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos y}{y} dy dx \qquad (2) \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_1^{\frac{1}{y}} x e^{xy} dx dy$$



다음 누차적분을 특별한 방법으로 계산하라.

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_x^{\frac{\pi}{4}} \tan(y^2) dy dx$$

$$(2) \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^3+1} dx dy$$



다음 중적분을 계산하라.

$$(1) \iint_D \sqrt{\frac{a^2 - x^2 - y^2}{a^2 + x^2 + y^2}} dx dy \quad D: x^2 + y^2 \leq a^2, y \geq 0 \quad (a \text{는 양의 정수})$$

$$(2) \iint_D y^2 dx dy \quad D: x^2 + y^2 \leq ax \quad (a \text{는 양의 정수})$$

다음 중적분을 계산하라.

$$(1) \iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy \quad D : a^2 \leq x^2+y^2 \leq 4a^2, 0 \leq x \leq a$$

$$(2) \iint_D \sqrt{x^2+y^2} dx dy \quad D : x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 \leq a^2, x^2+y^2 \geq ax$$



연습

▶ 중적분의 변수 변환 (강의편 p. 245, 255 참조)

다음 중적분을 계산하라.

(1) $\iint_D (2x+3y)e^x dx dy$ $D : 0 \leq 2x+3y \leq 1, -1 \leq 3x+5y \leq 1$

(2) $\iint_D \frac{1}{\sqrt{x}} dx dy$ $D : \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$

다음 중적분을 구하라.

$$(1) \iint_D (x-2y)\sin(2x+y)dxdy \quad D: \begin{cases} 0 \leq x-2y \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq 2x+y \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$(2) \iint_D xy^2dxdy \quad D: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$$



연습

▶ 부피(입체의 공유) (강의편 p. 245 참조)

구 $x^2+y^2+z^2 \leq a^2$ 와 원기둥 $x^2+y^2 \leq ax$ 의 공유 부분의 부피 V 를 구하라.



원기둥 $x^2+y^2 \leq a^2$, $y^2+z^2 \leq a^2$, $z^2+x^2 \leq a^2$ 의 공통 부분의 부피 V 를 구하라.



다음 중적분을 이상적분으로 계산하라.

$$(1) \iint_D \frac{x+y}{x^2+y^2} dx dy \quad D : 0 \leq y \leq x \leq 1$$

$$(2) \iint_D \frac{1}{\sqrt{1-x-y}} dx dy \quad D : x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1$$

다음 중적분을 이상적분으로 계산하라.

$$(1) \iint_D \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy \quad D : 0 \leq y \leq x \leq 1$$

$$(2) \iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}} dx dy \quad D : 0 \leq y \leq x \leq 1$$



다음 중적분을 무한적분으로 계산하라.

$$(1) \iint_D e^{-x-y} dx dy \quad D : 0 \leq x, 0 \leq y$$

$$(2) \iint_D \frac{1}{x(x^2+y^2)} dx dy \quad D : 1 \leq x, 0 \leq y \leq x$$

다음 중적분을 무한적분으로 계산하라.

$$(1) \iint_D xye^{-x^2-y^2} dxdy \quad D : 0 \leq x, 0 \leq y$$

$$(2) \iint_D \frac{1}{x^2+y^4} dxdy \quad D : 1 \leq y, 0 \leq x \leq y^2$$



다음 삼중 적분을 계산하라

$$(1) \iiint_D e^{x+y+z} dx dy dz \quad D : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z \leq 1$$

$$(2) \iiint_D xyz dx dy dz \quad D : 0 \leq x \leq y \leq z \leq 1$$

다음 삼중 적분을 계산하라.

$$(1) \iiint_D \sin(x+y+z) dx dy dz \quad D: x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z \leq \frac{\pi}{2}$$

$$(2) \iiint_D \frac{1}{(x+y+z+1)^3} dx dy dz \quad D: 0 \leq z \leq y \leq x \leq 1$$



연습

▶ 삼중 적분과 부피 (강의편 p. 268 참조)

xyz 공간 중 영역 $D : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ 의 부피를 구하라.



xyz 공간 중 영역 $D : \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \sqrt{a}, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ 의 부피를 구하라.



연습

▶ 곡면적 (강의편 p. 273 참조)

- (1) 곡면 $z=xy$ 의 $x^2+y^2 \leq a^2 (a>0)$ 에 있는 부분의 면적 S 를 구하라.
- (2) 곡면 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 의 $x^2+y^2 \leq ax (a>0)$ 에 있는 부분의 면적 S 를 구하라.



- (1) 곡면 $z = \tan^{-1} \frac{y}{x}$ 의 $x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1$ 을 만족하는 부분의 면적 S 를 구하라.
- (2) 곡면 $z^2 = 4ax$ 의 $x^2 + y^2 \leq ax (a > 0)$ 에 있는 부분의 면적 S 를 구하라.



연습

▶ 함수의 극한과 연속 (강의편 p. 281, 287, 295 참조)

- (1) $\lim_{x \rightarrow 8} \log_2 x = 3$ 을 ε - δ 논법으로 나타내라.
- (2) $f(x) = x^3 + 2x$ 가 $x=1$ 에서 연속임을 ε - δ 논법으로 나타내라.



- (1) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 을 ε - δ 논법으로 나타내라.
- (2) $f(x) = x^2 + 2x$ 가 $x=1$ 에서 연속임을 ε - δ 논법으로 나타내라.



연습

▶ 수열의 극한 (강의편 p. 293 참조)

(1) $a_n = \frac{n^3 - 2}{2n^3 + 1}$ 일 때 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$ 을 ε - N 논법으로 나타내라.

(2) $a_n = n(\sqrt{n^2 + 1} - n)$ 일 때 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$ 을 ε - N 논법으로 나타내라.



- (1) $a_n = \frac{2^n + 1}{3 \cdot 2^n - 1}$ 일 때 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{3}$ 을 ε - N 논법으로 나타내라.
- (2) $a_n = \sqrt{n^2 + 2n} - n$ 일 때 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ 을 ε - N 논법으로 나타내라.



연습

▶ ε - N 논법의 응용 (강의편 p. 297, 299 참조)

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ 일 때 다음이 성립함을 ε - N 논법으로 나타내라.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{1 + 2 + \cdots + n} = \alpha$$



$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ 일 때 다음이 성립함을 나타내라.

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \alpha \beta$

