

미적분에 빠진 하루

부록

콜디락스 접근법을 활용한
새로운 **미적분** 교과서



이 문서는 《미적분에 빠진 하루》(오스카 E. 페르난데스 저, 2020, 프리렉) 도서의 각 장 본문에 딸린 온라인 부록입니다.

그 밖에 책과 관련된 인터랙티브 그래프나 기타 자료와 이러한 부록의 원문은 저자의 도서 사이트에서 확인할 수 있습니다.

오스카 E. 페르난데스 지음
강신원 옮김

<https://calculussimplified.surroundedbymath.com>

참고로 원문 링크에는 원서에 있는 부록 A에 대한 온라인 부록도 있지만, 원서의 부록 A에 해당하는 대수와 기하에 대한 복습(Review of Algebra and Geometry)은 기본적인 내용이라 《미적분에 빠진 하루》 도서에 포함하지 않았습니다.



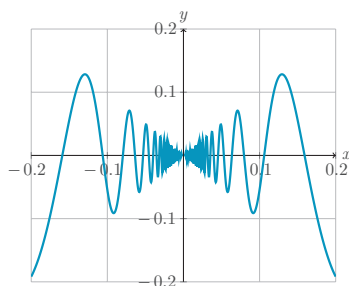
2장 부록

A2.1 극한의 엄밀한 정의

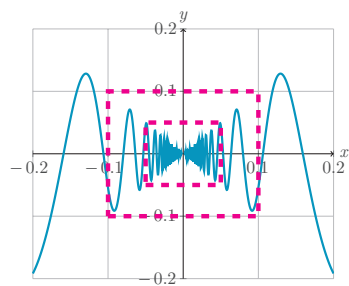
대부분의 학생들이 배우는 정의 2.1(극한의 직관적 정의)의 주된 문제점은 ‘한없이 다가간다’라는 문구입니다. 이러한 표현이 미적분을 엄밀하지 않다고 여기게 했고, 미적분에 대한 초기 비평가들이 바로 그 점을 파고들었습니다. 그들은 이렇게 주장했습니다. “만약 극한에서 x 가 c 에 ‘한없이(indefinitely)’ 다가간다면 x 값이 c 에 점점 가까워질수록 $f(x)$ 값은 계속해서 변하고 있지 않는가? 그렇다면 어떻게 어떠한 극한에 대해 정해진 값이 있다고 확신을 갖고 말할 수 있는가?”

1817년 수학자 베르나르트 볼차노(Bernard Bolzano)가 이러한 문제를 해결했습니다. 그는 ‘한없이 다가간다’ 문제를 완전히 피하는 방식으로 극한을 다시 표현했습니다. 그렇게 하면서 그는 극한에 대한 공식적인 정의를 내놓았으며, 이것이 바로 여전히 오늘날 우리가 사용하는 정의입니다(그가 이러한 정의를 처음 언급한 것은 아니지만, 이를 일반적으로 널리 알린 것으로 인정됩니다). 볼차노의 정의를 특정한 예를 통해 소개하겠습니다. 다음 그림에 있는 $f(x) = x \sin(1/x)$ 의 그래프를 살펴봅시다.

그래프가 $x \rightarrow 0$ 일 때 얼마나 심하게 진동하는지 주목



a



b

그림 A2.1 a $f(x) = x \sin(1/x)$ 의 그래프
 일부 b 원점을 중심으로 하는 상자에
 함수를 ‘가두는(trapping)’ 과정

해 봅시다(실제로 제 컴퓨터는 0에 매우 가까운 x 값에 대해 그래프를 그리는 데 어려움을 겪었습니다. 그래서 원점 근처에서 들쭉날쭉한 부분이 생겼습니다). 책의 2장에서는 $x \rightarrow 0$ 일 때 $f(x)$ 가 0으로 ‘향한다(tend to)’고 말했습니다. 볼차노의 주된 통찰은 ‘향한다’라는 의미를 공식화하는 것이었습니다.

극한에 대한 볼차노의 정의에 도달하기 위해 그래프에서 무슨 일이 일어나는지를 다음과 같이 묘사하겠습니다. ‘ y 값은 $y=0$ 을 중심으로 진동하며, 진동 범위는 $x=0$ 에 가까울수록 더 작아진다.’ 이 문장을 좀 더 정확하게 표현하면 다음과 같습니다. **$y=0$ 으로부터 떨어진 y 값의 최대 거리는 어느 한쪽으로부터 $x=0$ 에 접근함에 따라 감소한다.** 예를 들어 다음과 같습니다.

- x 값이 0으로부터 0.1 범위 내(즉, $-0.1 \leq x \leq 0.1$)에 있을 때, y 값은 $-0.1 \leq f(x) \leq 0.1$ 범위 안에 놓인다. (그림 A2.1 **b**에서 바깥쪽 붉은색 사각형)
- x 값이 0으로부터 0.05 범위 내(즉, $-0.05 \leq x \leq 0.05$)에 있을 때, y 값은 $-0.05 \leq f(x) \leq 0.05$ 범위 안에 놓인다. (그림 A2.1 **b**에서 안쪽 붉은색 사각형)

실제로 아무 숫자 ε (엡실론) >0 을 하나 고르면, x 값이 0으로부터 ε 범위 내(즉, $-\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$)에 있을 때, y 값 역시 $-\varepsilon \leq f(x) \leq \varepsilon$ 범위 안에 놓입니다. 수학적으로 적으면 다음과 같습니다.

$$\text{임의의 } \varepsilon > 0 \text{에 대해, } 0 < |x| < \varepsilon \text{이면 } |f(x)| < \varepsilon \text{이다.} \quad \text{A2.1}$$

(여기서 $0 < |x|$ 이라고 적은 것은 $x=0$ 을 고려 대상에서 제외하고자 한 것이기도 하지만, 부분적으로는 이 예에서 $f(0)$ 이 정의되지 않기 때문이기도 합니다.) 다른 말로 하자면, 원하는 숫자 $\varepsilon > 0$ 을 고르면, x 가 0으로부터 ε 범위 내에 있을 때 $f(x)$ 또한 0으로부터 ε 범위 내에 있게 된다는 뜻입니다. 더 작은 ε 을 고를수록 $f(x)$ 는 0에 더욱 가까워집니다. 즉, $x \rightarrow 0$ 일 때 $f(x)$ 는 0으로 향합니다. 이것이 바로 그림 A2.1 **b**에 내재된 동적 사고 방식과 극한에 대한 직관적 이해를 완벽하게 표현합니다.

극한에 대한 볼차노의 정의는 식 A2.1에서 $x \rightarrow 0$ 대신 $x \rightarrow c$ 로 $f(x) \rightarrow 0$ 대신 $f(x) \rightarrow L$ 로

일반화하면 됩니다. 또한 그림 A2.1 ㉔의 붉은색 사각형이 실제로는 직사각형일 가능성도 허용합니다. 즉, 사각형의 너비와 높이에 대한 경계가 서로 다른 두 숫자에 따라 달라집니다(식 A2.1에서는 단지 숫자 하나인데 비해). 이제 직사각형의 y 경계에 대해서는 앞서와 마찬가지로 ε 을 사용하여 정량화하고, x 경계를 정량화하는 데는 δ (델타)를 도입합니다. 결국 이것이 볼차노의 정의이며, 이를 오늘날에는 **엡실론-델타 논법을 이용한 극한의 정의**라고 부릅니다.

정의 A2.1 엡실론-델타 논법을 이용한 극한의 정의

c 를 숫자라 하고, f 는 c 를 포함하는 구간(c 는 제외될 수 있음)에서 정의된 함수라 하자.

이때 모든 $\varepsilon > 0$ 에 대해

$$0 < |x - c| < \delta \quad \text{이면 } \quad |f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{A2.2}$$

을 만족하는 $\delta > 0$ 가 존재한다면,

“ x 가 c 로 다가갈 때 $f(x)$ 의 극한은 L 이다.”라고 말하고 다음과 같이 적는다.

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$$

여기서 다음과 같은 두 가지 사항을 알 수 있습니다.

- 식 A2.2는 식 A2.1을 일반화한 것이다.
- $0 < |x - c| < \delta$ 라는 것은 $x = c$ (즉, $|x - c| = 0$)를 고려하지 않는다는 의미다. 이는 극한이 $x = c$ 에서 무슨 일이 일어나는지는 고려하지 않고, 단지 x 가 c 에 다가갈 때 무슨 일이 일어나는지만 고려하기 때문이다.

볼차노의 정의를 시각화하기 위해 먼저 부등식의 성질을 이용하여 식 A2.2를 전개해봅시다. 즉, 부등식에는 다음과 같은 성질이 있습니다.

$$|z - w| < d \quad \Leftrightarrow \quad -d < z - w < d \quad \Leftrightarrow \quad w - d < z < w + d$$

이를 식 A2.2에 적용하면 다음과 같습니다.

$$c - \delta < x < c + \delta (\text{단 } x \neq c) \quad \text{이면 } \quad L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon \quad \text{A2.3}$$

이런 식으로 바라보면 정의 A2.1이 의미하는 바는 다음과 같습니다. “어떤 $\varepsilon > 0$ 을 고르든지 $f(x)$ 값을 구간 $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$ 에 가둘 수 있는 x 값의 구간(즉, $c - \delta < x < c + \delta$)을 항상 찾을 수 있을 때 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ 이 성립한다.” 그림 A2.2에 이러한 모습을 나타냈습니다. 그래프를 보면 더욱 더 작은 ε 값을 고를수록 그래프를 더욱 더 점 (c, L) 에 가깝도록 가두는 붉은색 직사각형이 생기게 됩니다. 이를 해석한 것이 $x \rightarrow c$ 일 때 $f(x) \rightarrow L$ 입니다.

잠깐 시간이 있다면 다음 링크에 접속하여 정의 A2.1에 기반한 간단한 인터랙티브 프로그램을 살펴 보기를 권합니다.

<https://www.desmos.com/calculator/boqlawxrdr>

링크는 Desmos.com에 있는 그래프로 연결되는데, 함수를 그래프로 표시하고 c 값과 ε 값을 선택하여 해당하는 극한을 조사할 수 있습니다.

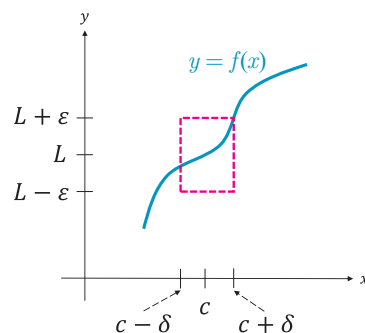


그림 A2.2 정의 A2.1의 시각화

A2.2 극한에서 변수의 치환

정리 A2.1



극한에서 변수의 치환

f 와 g 를 함수라 하자. $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = b$ 이고 c 를 포함하는 구간에서 $x \neq c$ 인 모든 x 에 대해 $g(x) \neq c$ 라고 가정하자. 이때 $\lim_{u \rightarrow b} f(u)$ 가 존재한다면 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = \lim_{u \rightarrow b} f(u) \quad \text{A2.4}$$

정리의 이름에서 알 수 있듯이, 이 정리의 결과인 식 A2.4를 통해 $x \rightarrow c$ 일 때 $f(g(x))$ 의 극한을 $u = g(x)$ 로 치환하여 $u \rightarrow b$ 일 때 $f(u)$ 의 극한으로 변환할 수 있습니다. 실제로 $u = g(x)$ 로 놓으면 가정에 따라 $x \rightarrow c$ 일 때 $g(x) \rightarrow b$ 이므로 역시 $x \rightarrow c$ 일 때 $u = g(x) \rightarrow b$ 가 됩니다. 따라서 $x \rightarrow c$ 를 $u \rightarrow b$ 로 바꾸고 $f(g(x))$ 를 $f(u)$ 로 바꾸면 됩니다. 이때 f 가 b 에서 연속이라면 극한 법칙 7(책의 본문 53쪽 정리 2.6)을 얻을 수 있습니다.

예 제

A2.1

정리 A2.1을 이용하여 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x}$ 를 구하라.

해답

이 극한은 책의 본문 예제 2.32(60쪽)에서 계산한 바에 따르면 2이다. 여기서 는 해당 예제에서 그랬듯이 다음과 같이 접근한다.

$$\frac{\sin(2x)}{x} = 2 \frac{\sin(2x)}{2x}$$

이런 식으로 바라보면 구하고자 하는 극한은 다음과 같다.

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{\sin(2x)}{2x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x}$$

$\sin(2x)/(2x)$ 함수는 $f(x) = \sin x/x$, $g(x) = 2x$ 인 합성 함수 $f(g(x))$ 로 볼 수 있다. 이

제 이를 이용하여 정리 A2.1의 모든 가정을 확인해보자. 과정은 다음과 같다.

- $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$ (따라서 정리에서의 b 값은 0이다.)
- 0을 포함하는 구간에서 $x \neq 0$ 인 모든 x 에 대해 $g(x) = 2x \neq 0$ 이다.
- 마지막으로 책의 본문 59쪽, 식 (2.3)에 따라 $\lim_{u \rightarrow 0} f(u) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$ 이다.

이제 정리 A2.1의 결론인 식 (A2.4)를 이용하면 다음과 같다.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x} = 2 \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 2(1) = 2$$

A2.3 지수 함수와 로그 함수의 연속성을 뒷받침하는 이론

미적분에서 가장 자주 마주하는 지수 함수는 e^x 입니다. 여기서 e 는 오일러의 수라고 알려진 무리수이며 극한으로 정의됩니다.

정의 A2.2 e 의 정의

e 로 표기하는 오일러의 수는 다음과 같이 정의한다.

$$e = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} \quad \text{(A2.5)}$$

(이러한 정의의 기원은 섹션 A2.6에서 논의합니다.) 이제 e^x 의 극한을 살펴봅시다. $f(x) = e^x$ 의 그래프를 그려보면 다음을 알 수 있습니다(그림 A2.3).

모든 실수 c 에 대해 $\lim_{x \rightarrow c} e^x = e^c$

A2.6

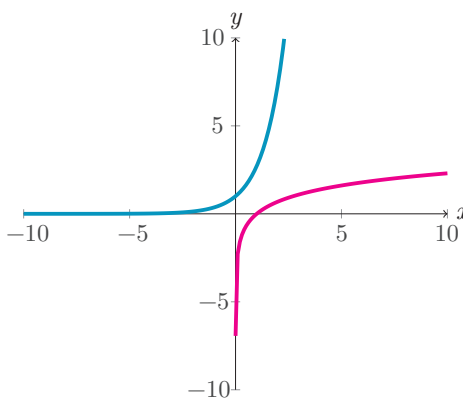


그림 A2.3 $f(x) = e^x$ (파란색)와 $f(x) = \ln x$ (붉은색) 그래프 일부

(정의 A2.1의 표현을 따르면 모든 $\varepsilon > 0$ 에 대해서 항상 점 (c, e^c) 을 중심으로 하는 붉은색 상자(어떤 c 를 고르더라도 그래프를 가두는)를 찾을 수 있습니다. 이는 앞서 언급한 링크에 접속하여 Desmos.com에 있는 그래프의 함수를 $f(x) = e^x$ 로 바꿔 확인할 수도 있습니다.) 식 A2.6에 따르면 e^x 이 모든 x 값 c 에서 연속임을 알 수 있습니다. 이를 통해 다음과 같은 일반적인 지수 함수의 연속성도 확립할 수 있습니다. 먼저 임의의 지수 함수 $g(x) = ab^x$ 을 밑이 e 인 지수 함수로 다시 적어봅시다.

$$ab^x = a(e^{\ln b})^x = ae^{rx}$$

여기서 $r = \ln b$ 입니다(로그는 책의 본문 부록 A의 섹션 A.8에서 다룹니다). 그러면 책의 본문 정리 2.3을 이용하여 $g(x) = ab^x$ 의 연속성을 확립할 수 있고, 이것이 본문의 정리 2.4가 됩니다.

이제 로그 함수의 연속성을 살펴봅시다. $f(x) = \ln x$ 의 그래프를 그려보면 다음을 알 수 있습니다(그림 A2.3).

모든 실수 $c > 0$ 에 대해 $\lim_{x \rightarrow c} \ln x = \ln c$

A2.7

(이것도 역시 정의 A2.1을 통해 검증할 수 있습니다.) 이에 따르면 $\ln x$ 가 모든 x 값 $c > 0$ 에서 연속임을 알 수 있습니다. 여기서 $c > 0$ 이라는 제한은 $\ln x$ 의 정의역이 구간 $(0, \infty)$ 이기 때문입니다. $\log_b x$ 는 밑 변환 공식(책의 부록 A 식 A.15, 279쪽)을 통해 $\ln x$ 형태로 나타낼 수

있으므로, 앞서 지수 함수에서 살펴본 방식과 유사한 과정을 거칠 수 있습니다. 따라서 책의 본문 정리 2.3을 통해 $g(x) = \log_b x$ 의 연속성을 확립할 수 있고, 이것이 역시 본문의 정리 2.4가 됩니다.

A2.4 중간값 정리

정리 A2.2



중간값 정리

f 가 닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 연속이고,
 N 은 $f(a) < N < f(b)$ 를 만족하는 수라고 하자(이때 $f(a) \neq f(b)$).
 그러면 $f(c) = N$ 을 만족하는 수 c 가 구간 (a, b) 안에 존재한다.

이 정리가 의미하는 바는 다음과 같습니다. ‘연속 함수 f 는 $f(a)$ 와 $f(b)$ 사이의 모든 y 값을 통과한다(단, $f(a) \neq f(b)$ 이고 관심 구간이 닫힌 구간 $[a, b]$ 라고 가정할 때).’ 이러한 결론에 도달한 이유는 $f(a)$ 와 $f(b)$ 사이의 어떠한 N 값을 고르더라도 구간 $[a, b]$ 내에 있는 어떠한 c 에 대해 $N = f(c)$ 가 성립하기 때문입니다. 다른 말로 하자면 어떠한 N 값을 고르더라도 그 값은 f 에 대한 어떠한 입력 c 의 출력이기 때문입니다. **그림 A2.4**에 특정 함수와 N, a, b 값에 대해 이를 그림으로 나타냈습니다.

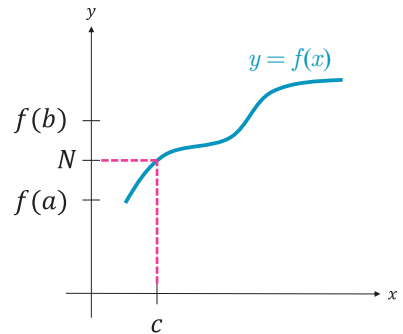


그림 A2.4 정리 A2.2의 그래프 표현

A2.5 식 2.3의 극한 추론

이 책 본문의 식 2.3을 추론하는 방법을 살펴보겠습니다.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

그림 A2.5를 살펴봅시다. 그림의 단위 원에서 중심각 θ 에 대응하는 호의 길이 s 는 $s = \theta$ 입니다($s = r\theta$ 이므로, 책의 부록 A 식 A.18 참고, 282쪽). 그림을 보면 알 수 있듯이 θ 가 0에 가까워지면 $s \approx \sin \theta$ 가 됩니다. 따라서 θ 가 0에 가까워지면 $\sin \theta \approx \theta$ 가 성립하고 $\frac{\sin \theta}{\theta} \approx 1$ 이 됩니다. 그림을 보면 이러한 근사값이 θ 가 0에 더 가까워질수록 정확해진다 것을 알 수 있으며, 이러한 결과가 바로 식 2.3입니다.

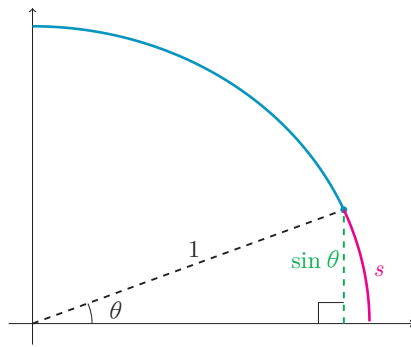


그림 A2.5 반지름 1인 원 위의 중심각 θ 에 해당하는 호의 길이 s (붉은색)과 높이 $\sin \theta$ (녹색)

A2.6 e의 극한 정의의 기원

오일러의 수 $e \approx 2.718$ 는 수학에서 수많은 중요한 공식에 등장하는 아주 특별한 무리수입니다. e 에 위대한 수학자 오일러(1707-1783)의 이름이 붙긴 했지만, 이 수를 발견한 것은 1638년 야코프 베르누이(Jacob Bernoulli)였습니다. 베르누이는 다음과 같은 단순한 문제를 탐구하고 있었습니다. ‘이자 지급 빈도가 이자가 붙는 예금 계좌의 잔액에 어떠한 영향을 미치는가?’ 특히, 여러분이 매년 $r\%$ 의 이자를 지급하는 예금 계좌를 개설하고 M_0 달러를 예금했다고 가정해봅시다(책의 본문 응용 예제 A.10에서와 똑같은 설정입니다). 이자를 매년 단 한 번만

지급할 때 이를 **연 복리**(yearly compounding)라 합니다. 어떤 예금 계좌는 잔액에 대해 매년 4번 이자를 지급하며(세 달마다 $(r/4)\%$) 이를 **분기 복리**(quarterly compounding)라 합니다. 일반적으로 예금 계좌에 매년 n 번의 이자를 지급할 때, 초기 예금 M_0 이후 t 년이 지난 계좌의 잔액 M 은 다음과 같습니다(책의 본문 연습문제 46번 참고, 79쪽).

$$M(t) = M_0 \left(1 + \frac{r}{n} \right)^{nt} \quad \text{A2.8}$$

여기서 r 은 소수로 표현한 연이율입니다. 베르누이는 이제 n 이 점점 커질 때(즉, 잔액에 대한 이자를 더욱 자주 지급할 때) 무슨 일이 일어나는지 살펴보았습니다. e 가 식 A2.8로부터 어떻게 출현하는지 알아보기 전에 먼저 구체적인 예를 통해 이를 살펴보겠습니다.

응용 예제
A2.2

매년 100% 이자를 1년에 n 번 복리로 지급하는 예금 계좌(와우!)에 \$1를 예금했다고 가정하자.

- (a) 첫 해가 지난 후 연말의 계좌 잔액 $M(1)$ 의 공식을 적으시오.
- (b) (a)번에서 얻은 함수의 그래프를 구간 $1 \leq n \leq 12$ 에 대해, 또한 구간 $200 \leq n \leq 1,000$ 에 대해 그리시오. 그리고 이렇게 얻은 결과를 해석하시오.

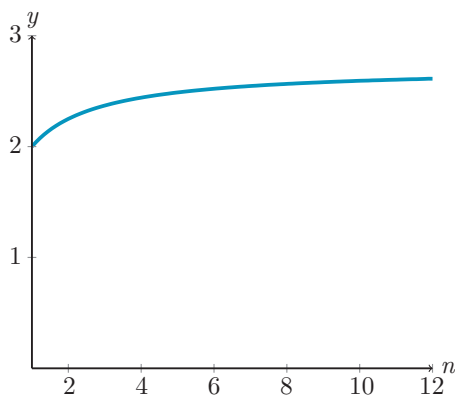
해답

- (a) 식 A2.8의 표기법을 따르자면, $M_0=1$, r 은 소수 표현으로 1, $t=1$ 이다. 따라서 다음과 같다.

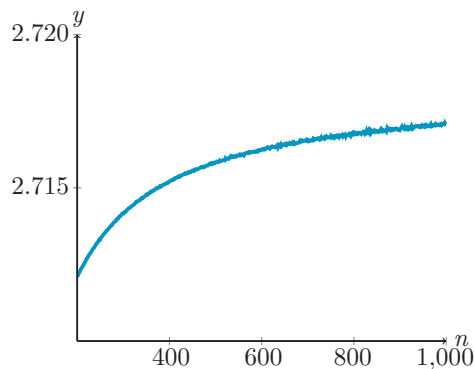
$$M(1) = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \quad \text{A2.9}$$

- (b) 그림 A2.6에 주어진 n 값에 대한 $M(1)$ 의 그래프를 나타냈다(여기서 $M(1)$ 값은 소수 세째 자리까지 반올림했다). 그림 ㉑의 들쭉날쭉한 부분은 인위적인 것이다. 이는 컴퓨터가 그래프의 해당 부분을 계산하는 데 어려움을 겪어서 나타난 현상

이다.



a



b

그림 A2.6 $y = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 그래프의 일부 a 구간 $1 \leq n \leq 12$ b 구간 $200 \leq n \leq 1,000$

그림 A2.6 a를 보면 알 수 있듯이, $M(1)$ 은 n 이 커짐에 따라 증가합니다. 즉, 이자를 더 자주 지급할수록(n 이 클수록) 1년 후의 잔액($M(1)$)이 더 커집니다. 하지만 그림 A2.6 b를 보면 조금 다른 점을 알 수 있습니다. 즉, $n \rightarrow \infty$ 일 때 $M(1)$ 은 2.715와 2.720 사이의 숫자에 가까웁니다. (금융에서는 $n \rightarrow \infty$ 를 **연속 복리**(continuous compounding)라고 부릅니다.) 베르누이는 정확한 숫자를 알아내려고 했지만, 단지 2와 3 사이에 있다는 결론만 내릴 수 있었습니다. 1748년이 되어서야 오일러가 $n \rightarrow \infty$ 일 때 식 A2.9의 우변의 극한이 e 라는 것을 증명했습니다.

$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \quad \text{A2.10}$$

오일러의 박사학위 지도교수는 요한 베르누이였고, 요한의 박사학위 지도교수는 그의 동생인 야코프 베르누이였습니다(여기서 지금까지 이야기한, 연속 복리에 호기심을 가졌던 바로 그 베르누이).



3장 부록

A3.1 식 3.14 에 있는 극한을 유도하는 다른 방법

책의 본문(103쪽)에 있는 식 3.14의 괄호 안 극한을 계산하는 다른 방법은 다음과 같습니다. 2장 부록의 식 A2.5에 주어진 e 의 정의에 여기서의 맥락에 맞는 표기법을 적용하면 다음과 같습니다.

$$e = \lim_{h \rightarrow 0} (1 + h)^{1/h}$$

h 가 0에 매우 가까울 때, 다음과 같이 간주할 수 있습니다.

$$h \approx 0 \text{에 대해} \quad e \approx (1 + h)^{1/h}$$

이는 $e^h \approx 1 + h$ 라는 뜻이므로 다음이 성립합니다.

$$h \approx 0 \text{에 대해} \quad \frac{e^h - 1}{h} \approx 1$$

$h \rightarrow 0$ 일 때 이러한 근삿값은 더욱 정확해집니다. 따라서 다음 식이 성립합니다.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$



4장 부록

A4.1 평균값 정리

먼저 평균값 정리를 살펴보며 시작합니다.

정리 A4.1



평균값 정리

f 가 닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 열린 구간 (a, b) 에서 미분 가능하다고 하자. 그러면 다음 식을 만족하는 수 c 가 구간 (a, b) 안에 있다.

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{A4.1}$$

평균값 정리를 그림으로 표현하기 전에 먼저 식 A4.1의 결론을 분석해보겠습니다. 식 A4.1의 좌변 $f'(c)$ 는 $x = c$ 에서 f 그래프 위의 접선의 기울기입니다. 식 A4.1의 우변은 점 $(a, f(a))$ 와 $(b, f(b))$ 를 지나는 할선의 기울기입니다(이는 책의 본문 90쪽, 식 3.8에서 단지 Δx 를 $b - a$ 로 바꾼 것입니다). 따라서 평균값 정리의 결론을 다음과 같이 다시 적을 수 있습니다. ‘구간 (a, b) 안에 점 $(a, f(a))$ 와 $(b, f(b))$ 를 지나는 할선의 기울기와 똑같은 접선의 기울기를 갖는 x 값이 적어도 하나 존재한다.’ 이러한 모습을 그림 A4.1에 나타냈습니다.

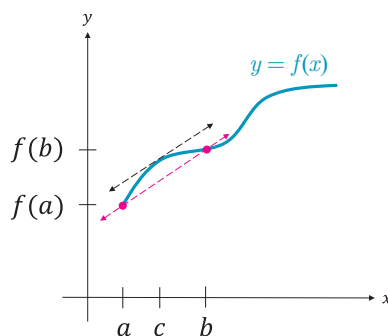


그림 A4.1 평균값 정리

A4.2 정리 4.1(책의 본문 155쪽)의 증명

정리 4.1(책의 본문 155쪽)은 다음과 같습니다.

정리 4.1



f 가 구간 (a, b) 에서 미분 가능하다고 하자. 그러면 다음이 성립한다.

- (a) 구간 (a, b) 의 모든 x 에 대해 $f'(x) > 0$ 이면 f 는 해당 구간에서 증가한다.
- (b) 구간 (a, b) 의 모든 x 에 대해 $f'(x) < 0$ 이면 f 는 해당 구간에서 감소한다.

여기서는 (a)의 증명을 살펴보고 (b)의 증명은 여러분 몫으로 남겨두겠습니다. 어떤 증명이든지 시작하기 전에 먼저 증명하려는 내용과 어떻게 증명에 도달할지를 생각해보는 것이 좋습니다. 여기서는 f 가 구간 (a, b) 에서 증가하고 있음을 보여야 합니다. 이 말은 곧 구간 (a, b) 에서 $x_1 < x_2$ 인 임의의 두 값 x_1 과 x_2 를 고를 때, 항상 $f(x_1) < f(x_2)$ 임을 보이면 된다는 뜻입니다. 그런데 구간 (a, b) 의 모든 x 에 대해 $f'(x) > 0$ 으로 주어졌으므로, f 는 구간 (a, b) 에서 연속입니다(미분 가능하면 연속이기 때문입니다. 책의 본문 97쪽 참고). 따라서 식 A4.1을 통해 미분계수를 함숫값과 관련 짓는 평균값 정리를 이용할 수 있습니다. 다만, 지금처럼 평균값 정리의 결론을 이용하려면 먼저 이렇게 평균값 정리의 가정을 확인해야만 합니다. 앞선 분석을 통해 증명을 위한 지침을 마련했습니다. 이제 공식적인 증명을 살펴봅시다.

증명: 구간 (a, b) 에서 $x_1 < x_2$ 인 임의의 두 값을 x_1 과 x_2 라 하자. 그런데 구간 (a, b) 의 모든 x 에 대해 $f'(x) > 0$ 이므로 f 는 구간 (a, b) 에서 미분 가능하고, 특히 구간 (x_1, x_2) 에서도 미분 가능하다.¹ 따라서 평균값 정리의 가정을 만족하므로, 평균값 정리를 적용하면 다음 식을 만족하

1 이 시점에서 누군가는 $x_1 = a$ 또는 $x_2 = b$ 이면 어떻게 될지 신경 쓰일 수 있다. 그렇게 되면 구간 $[a, x_2]$ 또는 $[x_1, b]$ 에 대해 이야기해야 하는데 정리 4.1에는 $x = a$ 나 $x = b$ 에서의 f 에 대한 가정이 없다. 따라서 $x_1 = a$ 또는 $x_2 = b$ 는 고려할 사항이 아니다. x_1 과 x_2 는 a 와 b 를 제외한 구간 (a, b) 에 있기 때문이다.

는 c 가 구간 (x_1, x_2) 에 존재한다.

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

이 식의 양변에 $x_2 - x_1$ 을 곱하면 다음과 같다.

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

여기서 $x_1 < x_2$ 이므로 $x_2 - x_1 > 0$ 이다. 그리고 구간 (a, b) 의 모든 x 에 대해 $f'(x) > 0$ 이므로 또한 $f'(c) > 0$ 이다. 따라서 $f'(c)(x_2 - x_1)$ 은 두 양수의 곱이므로 역시 양수가 된다. 그러므로 결론은 다음과 같다.

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$$

정리해보면, $x_1 < x_2$ 라고 가정했는데 $f(x_1) < f(x_2)$ 라는 결론을 얻었다. 게다가 x_1, x_2 쌍은 임의의 값이었으므로(단지 $x_1 < x_2$ 이고 x_1 과 x_2 가 구간 (a, b) 에 속하기만 하면 된다), 이러한 결론은 $x_1 < x_2$ 인 구간 (a, b) 안의 모든 x_1, x_2 쌍에 대해 성립한다. 그러므로 f 는 구간 (a, b) 에서 증가하고 있다.



5장 부록

A5.1 리만 합과 정적분

책의 섹션 5.2에서 정적분에 대한 라이프니츠의 관점을 논의했습니다. 즉, 정적분을 무한소의 폭 dx 와 높이 $f(x)$ 인 직사각형들의 면적 합으로 생각했습니다. 이후 1854년에 독일의 수학자 베른하르트 리만(Bernhard Riemann)이 라이프니츠의 아이디어를 정확하게 다듬었습니다(이번 부록의 이어지는 내용에서 관련된 역사를 간단히 살펴볼 수 있습니다). 그는 먼저 유한한 폭 Δx 와 높이 $f(x_i)$ 인 직사각형(여기서 x_i 는 직사각형의 밑변에 해당하는 구간 안에 있는 어떤 x 값)을 생각한 다음, 극한을 구함으로써 정적분에 도달할 수 있었습니다. 이는 책의 본문 1장의 그림 1.3에서 살펴본 미적분 워크플로와 정확히 일치합니다.

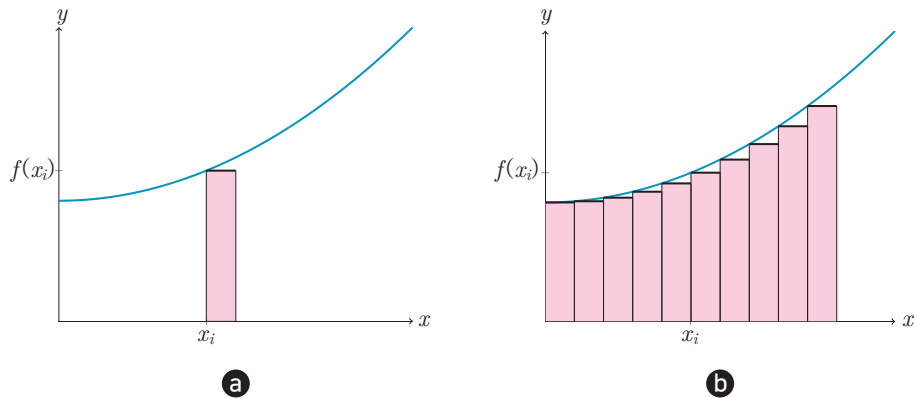


그림 A5.1 ㉠ 폭 Δx 와 높이 $f(x_i)$ 인 직사각형, 따라서 직사각형의 면적은 $f(x_i)\Delta x$ ㉡ 똑같은 폭 Δx 와 모두 $f(x_i)$ 형태의 높이를 지닌 여러 직사각형, 여기서 x_i 는 직사각형을 구성하는 구간의 왼쪽 끝점. 그림을 보면 알 수 있듯이 이들 직사각형 면적의 합은 곡선 아래의 면적을 근사한다.

리만의 직사각형 면적은 $f(x_i)\Delta x$ (높이와 밑변의 곱)입니다. **그림 A5.1 a**에 이러한 직사각형 하나를 나타냈습니다. 그리고 나서 **그림 A5.1 b**에서 볼 수 있듯이, 이러한 직사각형 n 개를 가정하여 $x=a$ 와 $x=b$ 사이의 $f(x)$ 그래프 아래 면적을 근사합니다. 이들 직사각형 면적의 합을 오늘날 **리만 합**(Riemann sum)이라 부릅니다.

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x$$

(Σ 기호는 ‘합(sum)’을 나타내고 아래쪽과 위쪽 첨자는 면적 $f(x_i)\Delta x$ 를 $i=0$ 부터 $i=n-1$ 까지 더해야 합을 나타냅니다.) 예를 들어 **그림 A5.1 b**에 있는 직사각형 면적의 합은 $n=10$ 인 리만 합입니다.

$$\sum_{i=0}^9 f(x_i)\Delta x = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \cdots + f(x_9)\Delta x$$

그리고 나서 리만은 다음과 같은 리만 합에서 $\Delta x \rightarrow 0$ 일 때의 극한으로 정적분을 정의할 수 있음을 보였습니다.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x \right] \quad \text{A5.1}$$

$\Delta x \rightarrow 0$ 일 때 직사각형의 폭이 축소되고, 결국 ‘무한소의 폭’을 지닌 라이프니츠의 직사각형이 됩니다. 그리고 앞에서 폭 Δx 의 직사각형을 n 개 사용한다고 말했으므로, $\Delta x \rightarrow 0$ 이면 근삿값을 구하기 위해 점점 더 많은 직사각형이 필요하게 됩니다. 따라서 $\Delta x \rightarrow 0$ 은 $n \rightarrow \infty$ 와 같습니다. (잠시 후에 이를 이용하여 리만 합 접근 방식으로 정적분을 구해보겠습니다.)

리만 합에 대해 지금까지 살펴본 내용에는 다음과 같은 중요한 두 가지 사실이 들어있습니다.

- 정적분에 대한 리만 접근 방식은 미분과 마찬가지로 정적분도 궁극적으로 극한의 관점에서 정의된다는 점을 나타낸다. 따라서 정적분의 존재 유무는 그러한 극한의 존재에 달렸다. (피적분 함수가 연속이라면 정적분이 존재함을 보일 수 있다.)

- 적분에 대한 리만 접근 방식은 곡선 아래의 면적을 추정하여 정적분을 근사할 수 있음을 상기시킨다. 그래프가 주어지고 모눈 격자가 표시되어 있다면 곡선 아래의 면적을 직접 추정해볼 수 있다(책의 본문 5장의 연습문제 16번 참고).

| 리만 합 구하기 |

이제 리만 접근 방식에 몇 가지 세부 사항을 채워 넣어 리만 합을 계산할 수 있도록 준비해 보겠습니다. 그림 A5.2 a에 표시된 밝은 붉은색 면적을 예로 설명하겠습니다. 여기서 적분 구간은 $[0, b]$ 입니다. 이제 이 구간을 n 개의 폭이 같은 소구간으로 나눈다고 가정합시다. 그러면 n 개의 소구간은 다음과 같습니다.

$$[0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, b] \quad \text{A5.2}$$

각 소구간의 폭을 Δx 로(이것이 곧 만들 각 직사각형의 폭이 됨) 표기하면 다음 식이 성립합니다.

$$n\Delta x = b \quad \text{A5.3}$$

이는 전체 적분 구간의 길이가 b 이고, 여기서 우리는 전체 구간을 길이 Δx 의 소구간 n 개로 나눴기 때문입니다. 식 A5.3을 변형하면 다음을 얻습니다.

$$\Delta x = \frac{b}{n} \quad \text{A5.4}$$

이제 첫 번째 소구간 $[0, x_1]$ 의 길이는 Δx 이므로 $x_1 - 0 = \Delta x$ 를 얻습니다. 따라서 $x_1 = \Delta x$ 입니다. 두 번째 소구간 $[x_1, x_2]$ 의 길이 역시 Δx 이므로 $x_2 - x_1 = \Delta x$ 입니다. 이때 $x_1 = \Delta x$ 이므로 다음 식이 성립합니다.

$$x_2 - x_1 = \Delta x \Rightarrow x_2 - \Delta x = \Delta x \Rightarrow x_2 = 2\Delta x$$

이제 x_3 의 공식이 $x_3 = 3\Delta x$ 라는 것은 쉽게 예측할 수 있습니다. 실제로 이를 일반화하면

다음과 같습니다.

$$x_i = i\Delta x, \quad i = 1, \dots, n \quad \text{A5.5}$$

(이때 식 A5.3에 따라 $x_n = n\Delta x = b$ 라는 점에 주의합시다.)

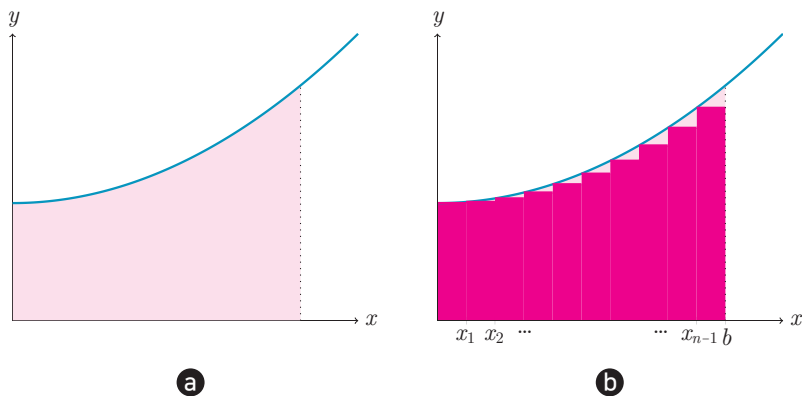


그림 A5.2

이제 우리가 곧 만들 모든 직사각형의 폭 Δx 와 위치 x_i 를 알게 되었습니다(그림 A5.2 **b** 참고). 따라서 이제 직사각형을 만드는 데 필요한 것은 높이를 결정하는 것뿐입니다. 리만 합 접근 방식에서 직사각형의 높이는 $f(x)$ 값이라는 점을 떠올려 봅시다. 여기서는 $f(x_i)$ 로 다음과 같이 각 소구간의 왼쪽 끝점의 함수값을 선택하겠습니다.¹

$$f(0), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_{n-1})$$

그리고 식 A5.5를 적용하면 이를 Δx 로 표현할 수 있습니다.

1 곧 이어서 만약 다른 값을 선택한다면 어떤 일이 일어나는지 살펴본다.

$$f(0), f(\Delta x), f(2\Delta x), \dots, f((n-1)\Delta x)$$

이러한 직사각형의 높이 각각에 폭 Δx 를 곱하면 각 직사각형의 면적이 나옵니다.

$$f(0)\Delta x, f(\Delta x)\Delta x, f(2\Delta x)\Delta x, \dots, f((n-1)\Delta x)\Delta x$$

그리고 이들을 모두 더하면 내접하는 직사각형들의 총 면적이 나옵니다.

$$f(0)\Delta x + f(\Delta x)\Delta x + f(2\Delta x)\Delta x + \dots + f((n-1)\Delta x)\Delta x = \sum_{i=0}^{n-1} f(i\Delta x)\Delta x \quad \text{A5.6}$$

이러한 합은 리만 합의 특정 형태로서, **왼쪽 리만 합**(left-endpoint Riemann sum)이라 부릅니다. 왜냐하면 직사각형을 만들 때 각 소구간의 왼쪽 끝점을 사용하기 때문입니다. 왼쪽 리만 합을 이용하여 정적분을 어떻게 구하는지 살펴보기에 앞서, 여기서 잠깐 멈추고 지금까지 한 작업을 좀 더 자세히 확인해 봅시다.

예 제
A5.1

그림 A5.1과 A5.2에 있는 파란색 곡선의 방정식을 $f(x) = x^2 + 1$ 이라 하자. 식 A5.6의 리만 합을 이용하여 f 의 그래프와 x 축, $x=0$, $x=1$ 로 둘러싸인 면적을 근사하라. 이때 각각 다음과 같은 직사각형 개수를 사용한다.

- (a) 3개의 내접 직사각형
- (b) 5개의 내접 직사각형
- (c) 10개의 내접 직사각형(그림 A5.2 ㉠ 참고)

해답

- (a) 여기서 $b=1$ 이고 $n=3$ 이다. 따라서 식 A5.4로부터 $\Delta x=1/3$ 이 각 직사각형의 폭이다. 이제 식 A5.5에 따라 $x_i=i/3$ 이므로 식 A5.6의 리만 합은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^2 f\left(\frac{i}{3}\right) \left(\frac{1}{3}\right) &= \sum_{i=0}^2 \left[\left(\frac{i}{3}\right)^2 + 1 \right] \left(\frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{1}{3} \left[1 + \left(1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2\right) + \left(1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2\right) \right] \\
&= \frac{1}{3} \left[3 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \right] \\
&= 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 [1 + 2^2] = \frac{32}{27} \approx 1.19
\end{aligned}$$

(b) 여기서 $n=5$ 이므로 $\Delta x=1/5$ 이 각 직사각형의 폭이다. 또한 $x_i=i/5$ 이므로 식

A5.6의 리만 합은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^4 f\left(\frac{i}{5}\right) \left(\frac{1}{5}\right) &= \sum_{i=0}^4 \left[\left(\frac{i}{5}\right)^2 + 1 \right] \left(\frac{1}{5}\right) \\
&= \frac{1}{5} \left[5 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{4}{5}\right)^2 \right] \\
&= 1 + \left(\frac{1}{5}\right)^3 [1 + 2^2 + \cdots 4^2] \\
&= \frac{31}{25} \approx 1.24
\end{aligned}$$

(c) 여기서 $n=10$ 이므로 $\Delta x=1/10$ 이 각 직사각형의 폭이다. 또한 $x_i=i/10$ 이므로

식 A5.6의 리만 합은 다음과 같다.

$$\sum_{i=0}^9 f\left(\frac{i}{10}\right) \left(\frac{1}{10}\right) = 1 + \left(\frac{1}{10}\right)^3 [1 + 2^2 + \cdots 9^2] = \frac{257}{200} \approx 1.285$$

이 숫자들은 대략 1.3 근처의 어떤 숫자에 천천히 다가가는 것처럼 보입니다. 다음 링크에 접속하면 인터랙티브 프로그램을 통해 앞선 리만 합이 어떤 숫자에 다가가는지, n 을 더 늘려가며 확인해 볼 수 있습니다(또한 $f(x)$ 와 a, b 를 변경하여 리만 합을 더 폭넓게 살펴볼 수도 있습니다).

<https://www.desmos.com/calculator/9tp1vfohv6>

지금까지 살펴본 바에 따르면 구간 $[0,1]$ 에 걸친 x^2+1 의 정적분이 1.3 근처임을 알 수 있습니다. 이제 리만의 접근 방식에서 마지막 부분인 식 A5.1의 극한을 추가하여 해당 숫자를 고정해 보겠습니다.

| 리만 합으로 정적분 구하기 |

그림 A5.2 a의 음영 영역은 $x=0$ 에서 $x=b$ 까지 x^2+1 의 정적분입니다. 리만의 접근 방식에 따라 식 A5.1을 이용하면 이는 다음과 같습니다.

$$\int_0^1 (x^2 + 1) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \Delta x \quad \text{A5.7}$$

이제 해야 할 일은 $f(x_i)$ 와 Δx 를 계산하여 우변의 리만 합을 구하고, $\Delta x \rightarrow 0$ 일 때 극한을 취해 결과를 얻는 것입니다.

이미 앞선 예제에서 했던 작업을 n 개의 직사각형으로 일반화하면 더 많은 작업을 수행할 수 있습니다. 따라서 10개의 직사각형을 이용했던 앞선 예제의 (c)번의 풀이에 있는 식에 10 대신 n 을 대입하겠습니다. 그러면 다음과 같은 리만 합을 얻습니다.

$$\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) \left(\frac{1}{n}\right)$$

이를 식 A5.7에 대입하면 다음을 얻습니다.

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x^2 + 1) dx &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) \left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{n}\right)^3 [1 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2] \right\} \quad \text{A5.8} \end{aligned}$$

괄호 [] 안의 양은 1부터 $n-1$ 까지 자연수 제곱의 합입니다. 이를 시그마 표기법으로 나타내면 다음과 같습니다.

$$1 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 = \sum_{i=1}^{n-1} i^2$$

따라서 식 A5.8은 다음과 같습니다.

$$\int_0^1 (x^2 + 1) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{n^3} \right) \sum_{i=1}^{n-1} i^2 \right\} \quad \text{A5.9}$$

여기서 우변의 시그마로 나타낸 합은 다음과 같은 공식으로 풀 수 있습니다.²

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}, \quad n \geq 1 \quad \text{A5.10}$$

이를 식 A5.9에 대입하면 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x^2 + 1) dx &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{n^3} \right) \left[\frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \right] \right\} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right] \quad \text{A5.11} \end{aligned}$$

이제 이러한 극한을 계산하는 방법은 다음 두 가지가 있습니다.

1. $\Delta x \rightarrow 0$ 일 때 $n \rightarrow \infty$ 라는 점을 떠올리면, 앞선 극한은 $1 + 1/3 = 4/3$ 이 된다($1/n$ 과 $1/n^2$ 은 $n \rightarrow \infty$ 일 때 모두 0에 다가가기 때문).
2. 식 A5.4로부터 $\Delta x = 1/n$ 이라는 점을 떠올리면, 다음과 같이 앞선 식의 모든 $1/n$ 을 Δx 로 치환할 수 있다.

$$\int_0^1 (x^2 + 1) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}(\Delta x) + \frac{1}{6}(\Delta x)^2 \right] \quad \text{A5.12}$$

그러면 $\Delta x \rightarrow 0$ 일 때 우변은 역시 $4/3$ 로 다가간다.

이들 중 두 번째가 각 직사각형의 폭 Δx 가 변함에 따라 리만 합 면적이 어떻게 되는지 정확하게 보여주는 이점이 있습니다. 이러한 작업을 통해 이제 다음과 같은 결론을 내릴 수 있습

2 이 공식에 대한 다양한 증명은 다음 링크에서 확인할 수 있다. https://proofwiki.org/wiki/Sum_of_Sequence_of_Squares

니다.

$$\int_0^1 (x^2 + 1) dx = \frac{4}{3} = 1.\bar{3} \quad \text{A5.13}$$

(여기서 $1.\bar{3} = 1.333\dots$ 은 순환 소수입니다.) 이것이 바로 앞서 예측한 대략 1.3 근처의 값입니다.

지금까지 리만 접근 방식을 이용하여 첫 번째 적분을 계산했습니다. 이러한 작업에는 꽤 오랜 시간이 걸리기 때문에 보통은 이런 방식으로 적분을 계산하지 않습니다. 사용할 수 있는 훨씬 더 빠른 방법이 있기 때문입니다(이는 미적분의 기본 정리(책의 본문 209쪽, 정리 5.1)로부터 비롯되며, 책의 섹션 5.4-5.10에서 논의합니다).

하지만 리만 합은 여전히 유용합니다. 그중 하나로 앞선 예제에서 살펴봤듯이 리만 합으로 정적분의 근삿값을 구할 수 있으므로, 정확한 정적분을 계산할 수 없을 때 유용하게 사용할 수 있습니다. 이제 정적분의 리만 합 정의를 살펴보며 이번 이야기를 마치겠습니다.

정의 A5.1 정적분

f 를 함수라 하자. $x = a$ 와 $x = b$ 사이에서 f 의 정적분은 다음과 같이 정의된다.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \Delta x \quad \text{A5.14}$$

여기서 $x_i = a + i\Delta x$ 이고 $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ 이며, 극한이 존재해야 한다.

이것이 정적분의 유효한 정의임을 증명하는 것은 매우 어렵지만, 실제로 이러한 정의로 정확한 정적분 값을 얻을 수 있습니다(증명은 보통 심화 미적분 과정이나 실해석학(real analysis) 과정에서 논의합니다). 다음은 이러한 정의의 이해를 돕는 두 가지 추가 예제입니다.

예 제**A5.2**

주어진 구간에서 다음 함수의 정적분을 구하라.

(a) $f(x) = x^3, [0, 1]$

(b) $g(x) = x^2 + x, [1, 2]$

힌트

(a) 다음 공식이 도움된다.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n-1} i^3 &= 1 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3 \\ &= \frac{n^4}{4} - \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}, \quad n \geq 1\end{aligned}$$

힌트

(b) 다음 공식이 도움된다.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n-1} i &= 1 + 2 + \cdots + (n-1) \\ &= \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}, \quad n \geq 1\end{aligned}$$

해답

(a) 여기서는 $a=0, b=1$ 이므로 $\Delta x = (1-0)/n = 1/n$ 이고 $x_i = 0 + i/n = i/n$ 이다(정의 A5.1 참고). 이제 식 A5.14의 우변에 있는 리만 합을 먼저 구해보자.

$$\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) \left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{i}{n}\right)^3 \left(\frac{1}{n}\right)$$

$f(x) = x^3$ 이므로 $f(i/n) = (i/n)^3$ 을 사용하고 계속해서 풀어보자.

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{i}{n}\right)^3 \left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i^3}{n^4}$$

우변의 합에 있는 모든 항은 분모가 n^4 인 분수이므로, $1/n^4$ 을 계수로 빼낸다.

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{i^3}{n^4} = \frac{1}{n^4} \left[\sum_{i=0}^{n-1} i^3 \right]$$

이제 공식을 사용한다.

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^4} \left[\sum_{i=0}^{n-1} i^3 \right] &= \frac{1}{n^4} \left[\frac{n^4}{4} - \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} \right] = \frac{1}{4} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}(\Delta x) + \frac{1}{4}(\Delta x)^2\end{aligned}$$

$\Delta x = 1/n$ 을 적용하고 최종적으로 극한을 구하면 다음과 같다.

$$\int_0^1 x^3 dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2}(\Delta x) + \frac{1}{4}(\Delta x)^2 \right] = \frac{1}{4}$$

(b) 여기서는 $a=1, b=2$ 이므로 $\Delta x = (2-1)/n = 1/n$ 이다. 따라서 $x_i = a + i\Delta x = 1 + i/n$ 이다. 마찬가지로 식 A5.14의 우변에 있는 리만 합을 구해보자.

$$\sum_{i=0}^{n-1} g\left(1 + \frac{i}{n}\right) \left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \left[\left(1 + \frac{i}{n}\right)^2 + \left(1 + \frac{i}{n}\right) \right] \left(\frac{1}{n}\right)$$

$g(x) = x^2 + x$ 이므로 $g(1 + i/n) = (1 + i/n)^2 + (1 + i/n)$ 을 사용한다. 이때 앞선 식에서 괄호 [] 안의 식은 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\left(1 + \frac{i}{n}\right)^2 + \left(1 + \frac{i}{n}\right) = 1 + \frac{2i}{n} + \frac{i^2}{n^2} + 1 + \frac{i}{n} = 2 + \frac{3i}{n} + \frac{i^2}{n^2}$$

따라서 리만 합은 다음과 같다.

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left[2 + \frac{3i}{n} + \frac{i^2}{n^2} \right] \left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{i^2}{n^3} + \frac{3i}{n^2} + \frac{2}{n} \right]$$

이를 다음과 같이 나눌 수 있다.

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{i^2}{n^3} \right] + \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{3i}{n^2} \right] + \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{2}{n} \right]$$

첫 번째 합의 각 항에는 $1/n^3$, 두 번째 합의 각 항에는 $3/n^2$, 세 번째 합의 각 항에는 $2/n$ 이 곱해져 있으므로 이를 빼내면 다음과 같다.

$$\frac{1}{n^3} \left[\sum_{i=0}^{n-1} i^2 \right] + \frac{3}{n^2} \left[\sum_{i=0}^{n-1} i \right] + \frac{2}{n} \left[\sum_{i=0}^{n-1} 1 \right]$$

마지막 합은 1을 n 번 더한 것이므로 n 이다. 첫 번째 합에 식 (A5.10)을 사용하고 두 번째 합에 힌트로 주어진 식을 사용하면 다음과 같다.

$$\frac{1}{n^3} \left[\frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \right] + \frac{3}{n^2} \left[\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} \right] + 2 = \frac{11}{6} - \frac{2}{n} + \frac{1}{6n^2} + 2 = \frac{23}{6} - \frac{2}{n} + \frac{1}{6n^2}$$

$\Delta x = 1/n$ 이므로 Δx 를 이용하여 리만 합을 나타내면 다음과 같다.

$$\sum_{i=0}^{n-1} g\left(1 + \frac{i}{n}\right) \left(\frac{1}{n}\right) = \frac{23}{6} - 2(\Delta x) + \frac{1}{6}(\Delta x)^2$$

마지막으로 $\Delta x \rightarrow 0$ 일 때 극한을 구하면 다음과 같다.

$$\int_1^2 (x^2 + x) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{23}{6} - 2(\Delta x) + \frac{1}{6}(\Delta x)^2 \right] = \frac{23}{6}$$

그림 A5.3 **a** - **b**에 이번 예제로 구한 두 면적을 나타냈다.

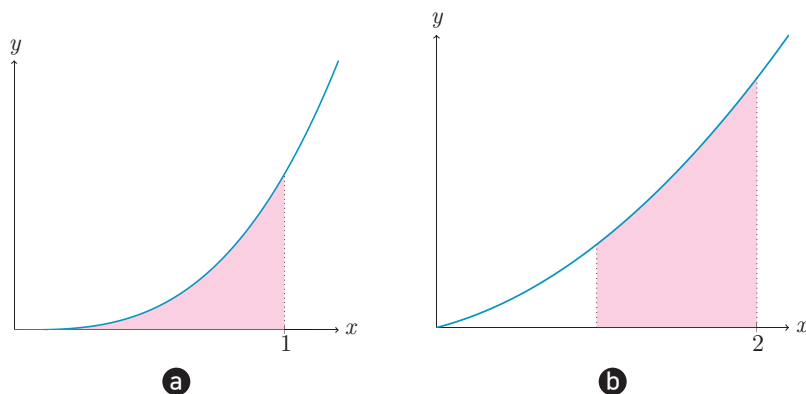


그림 A5.3

A5.2 간략히 살펴보는 적분의 역사

적분은 고대 이집트인과 그리스인이 면적을 계산할 때 사용한 접근 방식인 **소진법**(method of exhaustion)에 뿌리를 두고 있습니다. 소진법은 다음과 같은 3단계 절차로 구성됩니다(그림 A5.4에서는 원에 대해 적용함).

1. 면적을 구하려는 영역을 이미 면적을 어떻게 계산하는지 알고 있는 더 작은 영역으로 분할한다(예: 그림 A5.4의 붉은색 삼각형들).
2. 잘린 작은 영역들의 면적을 더하여 구하려는 영역 면적의 근삿값을 얻는다(그림

A5.4의 검은색 다각형).

3. 사용하는 작은 영역의 개수가 증가할수록 이들 면적의 총합이 결국에는 구하려는 영역을 모두 소진(exhaust, 전체를 소비)함을 보인다.

간단히 설명하자면 이것이 바로 소진법입니다. (이 과정을 보며 여러분이 극한을 떠올리길 바랍니다. 실제로 이러한 개념은 일찍이 기원전 400년경에 널리 퍼져 있었습니다.) 아르키메데스(기원전 287-212년경)와 다른 고대 그리스인들은 이 방법을 이용하여 원의 면적과 또 다른 곡선 형태의 부피(예: 구와 원뿔)를 정확하게 도출했습니다. 훨씬 후에 이탈리아의 수학자 보나벤투라 카발리에리(1598-1647, 많은 사람들이 ‘현대 과학의 아버지’로 여기는 갈릴레오의 제자였음)는 이 방법을 적분의 선구자격인 **불가분량법**(또는 카발리에리의 원리, method of indivisibles)이라 알려진 기법으로 발전시켰습니다.

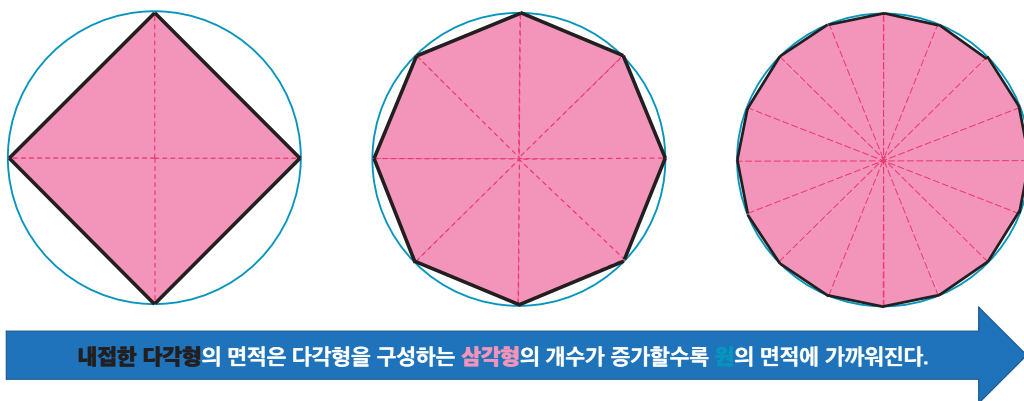


그림 A5.4

| 소진법으로부터 불가분량법으로 |

다시 그림 A5.4로 돌아가 잠시 살펴보면, 원에 내접하는 삼각형이 늘어날수록 각 삼각형의 면적이 점점 0에 가까워진다는 것을 알 수 있습니다. 이러한 아이디어로부터 논리적인 결론

을 유추해보면, **그림 A5.4**의 과정을 통해 얻은 무한한 개수의 면적이 0인 ‘삼각형’을 더하여 원의 면적을 구할 수 있다고 할 수 있습니다. 그렇습니다, 뭔가 말이 안 되는 것 같습니다. 하지만 여기에는 훌륭한 직관이 담겨 있습니다. 그럼 잘못된 점을 바로잡아 봅시다. 한 가지 문제는 이렇게 면적이 0인 ‘삼각형’이 실제로는 삼각형이 아니라 원의 반지름이라는 것입니다. 그렇다면 이렇게 고쳐 봅시다. 즉, “원의 면적은 무한한 개수의 반지름이 포함하는 ‘면적’의 합이다.” (이를 나타낸 것이 **그림 A5.5 a**입니다.) 카발리에리가 말했듯이 원의 면적은 ‘모든 선(반지름)의 합’입니다. 그리고 이러한 각각의 선은 ‘나눌 수 없기(indivisible)’ 때문에(즉, 하나의 반지름을 두 개의 반지름으로 분할할 수 없음), 면적과 부피를 계산하는 이러한 접근법이 **불가분량법**(method of indivisibles)으로 알려지게 되었습니다.

카발리에리는 1635년에 자신의 불가분량법에 대해 자세히 설명하는 책을 출판했습니다. 이는 그 당시 수학자에게 큰 영향을 미쳤지만, 모든 사람이 이러한 방법에 핵심적인 역설이 들어있다는 점을 알아챘습니다. 즉, 면적이나 부피를 두께가 0인 모양의 합으로 표현한다는 것입니다(예: 원의 경우 반지름). 미적분의 공동 발명가인 고트프리트 라이프니츠는 이러한 역설을 해결하고 불가분량법을 오늘날 우리가 **적분(integral)**이라고 부르는 방법으로 효과적으로 전환하는 방법을 고안했습니다.

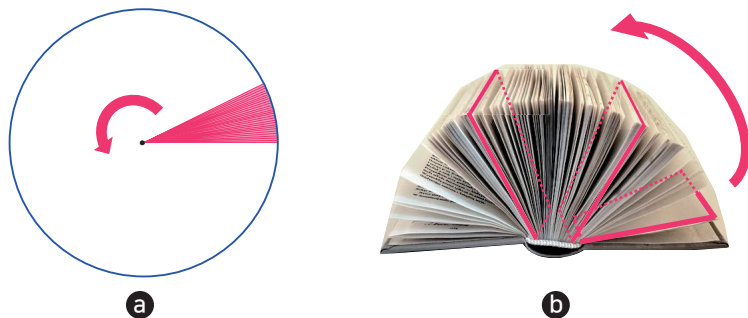


그림 A5.5 a 면적이 0인 내접하는 ‘삼각형(반지름)’을 더해가며 원의 면적을 휩쓸고 간다. **b** (거의) 부피가 0인 내접하는 직사각형(아주 얇은 직육면체, 즉 책의 페이지)을 더해가며 책의 부피를 휩쓸고 간다.

불가분량법으로부터 적분으로

간단한 실험을 통해 라이프니츠의 생각을 살펴보겠습니다. 책을 덮고 테이블 위에 놓았다고 상상해 봅시다. 책의 부피 책을 구성하는 개별 페이지 부피의 합으로 생각할 수 있습니다 (이를 나타낸 것이 **그림 A5.5 b**입니다). 각 페이지의 두께는 매우 얇아서 각 페이지의 부피(페이지의 면적에 작은 두께를 곱한 값)는 0에 가깝지만 0은 아닙니다. 두께가 0인 모양을 고려하면 불가분량법의 핵심적인 역설로 되돌아갈 수 있습니다. 그러나 두께가 ‘상상할 수 있는 만큼 작지만 0이 아닌’ 페이지를 고려한다면 어떨까요? 이렇게 하면 불가분량법의 직관을 이용하여 책의 부피를 계산하면서도 두께가 0인 역설을 피할 수 있게 됩니다.

이것이 사실상 라이프니츠가 제안한 것으로서, 책의 본문 205쪽, **그림 5.3**을 다시 살펴보면 곡선 아래의 면적이 ‘무한소 폭을 지닌 모든 직사각형의 합’이라는 라이프니츠의 주장(또한 카발리에리의 주장이기도 함)을 확인할 수 있습니다.